

Title	境界入力をもつ移流拡散方程式系の安定化 (関数方程式のダイナミクスと数理モデル)
Author(s)	佐野, 英樹; 中桐, 信一
Citation	数理解析研究所講究録 (2009), 1637: 120-132
Issue Date	2009-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/140515">http://hdl.handle.net/2433/140515</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 境界入力をもつ移流拡散方程式系の安定化

### Stabilization of Transport-Diffusion Equations with Boundary Input

鹿児島大学・学術情報基盤センター 佐野 英樹 (Hideki Sano)  
Computing and Communications Center,  
Kagoshima University  
神戸大学・工学研究科 中桐 信一 (Shin-ichi Nakagiri)  
Graduate School of Engineering,  
Kobe University

#### 1 はじめに

80 年代のはじめより, 無限次元動的システムに対する有限次元安定化コントローラの構成法に関する研究が, 多くの研究者によってなされてきている (例えば, 文献 [9], [12], [3], [7], [4], [1], [11], [2], [6] を参照). 一般に, 無限次元システムに対する有限次元モデルに基づいて有限次元コントローラを構成し, それを無限次元システムに取り付けるとき, モデル化されていないモードの影響により, スピルオーバー現象が生じる可能性がある. 坂和は線形拡散系を取り上げ, 有限次元コントローラを取り付けた閉ループ系に対してモデル化されていないモードの影響を弱めるために, 二種類の有限次元オブザーバをはじめて導入した [9]. 後に Balas はその一方を “Residual Mode Filter” と呼び, Residual Mode Filter (RMF) が有限次元安定化コントローラの構成において本質的な役割を果たしていることを示した [1]. ここで, 文献 [9] で取り上げられた線形拡散方程式は単独の方程式であり, 移流項を含んでいないことに注意されたい. そこで本稿では, その結果 [9] を化学反応プロセスに関連した境界入力をもつ移流拡散系に拡張する. ここで取り上げる移流拡散系は二つの線形移流拡散方程式によって記述され, 漸近安定ではない.

本稿では境界入力をもつ移流拡散系を安定化するために, センサの影響関数は領域の内部に分布した形で配置されていると仮定する. はじめに, そのシステムをあるヒルベルト空間における非有界出力作用素を有する発展方程式として定式化する. つぎに, その無限次元動的システムに対して直交射影作用素を用いて有限次元モデルを導出する. そのとき, 有限次元モデルに対する可制御性・可観測性に関する仮定のもとで, そのモデルに対して効果的に働く安定化コントローラを構成できる. しかしながら, このような方法で構成された有限次元コントローラは元の無限次元システムに対しては安定化コントローラとして機能するとは限らない. そこで, 有限次元安定化コントローラ的设计に対して RMF を用いる. 本稿の目的は, 有限次元モデルに対して構成された有限次元コントローラと RMF からなるコントローラが, RMF の次数が十分大きいときに, 元の無限次元システムに対する有限次元安定化コントローラになり得ることを半群理論を用いて証明することである. さらに, 数値実験をとおしてその有効性を検証する.

## 2 システムの記述と安定化問題

### 2.1 システムの記述と定式化

本稿では境界入力をもつ以下の移流拡散系を考える<sup>1</sup>.

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}(t, x) - \alpha \frac{\partial z_1}{\partial x}(t, x) - a_1 z_1(t, x), \\ \frac{\partial z_2}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}(t, x) - \alpha \frac{\partial z_2}{\partial x}(t, x) + a_2 z_1(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x}(t, 0) = u(t), \quad \frac{\partial z_1}{\partial x}(t, 1) = 0, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial z_2}{\partial x}(t, 1) = 0, & t > 0 \\ z_1(0, x) = z_{10}(x), \quad z_2(0, x) = z_{20}(x), & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (1)$$

また, 出力方程式を

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T = \left[ \int_0^1 c_1(x) z_1(t, x) dx, \int_0^1 c_2(x) z_2(t, x) dx \right]^T \quad (2)$$

とする. ここで,  $\alpha, a_1, a_2$  は正の物理定数であり,  $c_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) はセンサの影響関数を表す.  $u(t) \in \mathbf{R}$  は制御入力であり,  $y(t) \in \mathbf{R}^2$  は観測出力である.  $\mathcal{L}$  を

$$\mathcal{L}\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \alpha \frac{d\varphi}{dx} + a_1\varphi, \quad x \in (0, 1)$$

で定義すると, システム (1), (2) は以下のように表せる.

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t}(t, x) = -\mathcal{L}z_1(t, x), \\ \frac{\partial z_2}{\partial t}(t, x) = -\mathcal{L}z_2(t, x) + a_1 z_2(t, x) + a_2 z_1(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \\ \frac{\partial z_1}{\partial n}(t, \xi) = g(\xi)u(t), \quad \frac{\partial z_2}{\partial n}(t, \xi) = 0, & (t, \xi) \in (0, \infty) \times \{0, 1\} \\ z_1(0, x) = z_{10}(x), \quad z_2(0, x) = z_{20}(x), & x \in [0, 1] \\ y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T = \left[ \int_0^1 c_1(x) z_1(t, x) dx, \int_0^1 c_2(x) z_2(t, x) dx \right]^T \end{cases} \quad (3)$$

ここで  $\partial/\partial n$  は点  $\xi \in \{0, 1\}$  における外向き法線微分を示し,  $g: \{0, 1\} \rightarrow \mathbf{R}$  は

$$g(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi = 0 \\ 0, & \text{if } \xi = 1 \end{cases}$$

によって定義される関数である. 非有界作用素  $A_1$  を

$$\begin{aligned} D(A_1) &= \{ \varphi \in H^2(0, 1); \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0 \} \\ A_1\varphi &= \mathcal{L}\varphi, \quad \varphi \in D(A_1) \end{aligned} \quad (4)$$

のように定義する. このとき,  $A_1$  は Sturm-Liouville 型の作用素として表される.

$$\begin{aligned} (A_1\varphi)(x) &= \frac{1}{w(x)} \left( -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right) + q(x)\varphi(x) \right) \\ w(x) &= p(x) = e^{-\alpha x}, \quad q(x) = a_1 e^{-\alpha x} \end{aligned} \quad (5)$$

<sup>1</sup>文献 [14] で Winkin らは点  $x = 0$  で別の境界条件を与え, システム (1), (2) の可観測性, 可到達性について議論している.

したがって、作用素  $A_1$  は内積

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\alpha = \int_0^1 \varphi(x) \psi(x) e^{-\alpha x} dx \quad \text{for } \varphi, \psi \in L_\alpha^2(0, 1)$$

を有する重み付けられた  $L^2$ -空間  $L_\alpha^2(0, 1)$  において自己共役になる. このとき, 空間  $L_\alpha^2(0, 1)$  は空間  $L^2(0, 1)$  と集合として一致し, しかもノルム同値になる. 作用素  $A_1$  は  $L^2(0, 1)$  においてコンパクトなレゾルベントをもつので,  $A_1$  は  $L_\alpha^2(0, 1)$  において固有値, 固有関数  $\{\lambda_i, \varphi_i\}_{i=0}^\infty$  をもち,  $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$  は  $L_\alpha^2(0, 1)$  において完全正規直交系を形成する. よって, 任意の  $f \in L_\alpha^2(0, 1)$  は以下のように展開できる.

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \langle f, \varphi_i \rangle_\alpha \varphi_i$$

$A_1$  の  $L_\alpha^2(0, 1)$  における固有値, 固有関数は具体的につぎのように与えられる.

$$\begin{cases} \lambda_0 = a_1, & \varphi_0(x) \equiv \nu_0 \\ \lambda_i = i^2 \pi^2 + \frac{\alpha^2}{4} + a_1, & \varphi_i(x) = \nu_i \left( e^{\frac{\alpha}{2}x} \cos i\pi x - \frac{\alpha}{2i\pi} e^{\frac{\alpha}{2}x} \sin i\pi x \right), \quad i \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

ここで

$$\nu_0 := \sqrt{\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}}, \quad \nu_i := \sqrt{\frac{2}{1+\frac{\alpha^2}{4i^2\pi^2}}}, \quad i \geq 1$$

本稿では, (3) 式における初期値  $z_{10}, z_{20}$  およびセンサの影響関数  $c_i$  は  $L_\alpha^2(0, 1)(= L^2(0, 1))$  の中から選ばれていると仮定する.

いま, 新しい変数

$$x_1(t) = A_1^{-\frac{1}{4}-\epsilon} z_1(t, \cdot), \quad x_2(t) = A_1^{-\frac{1}{4}-\epsilon} z_2(t, \cdot) \quad (7)$$

を導入しよう. ここで  $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$  (e.g. 文献 [7]). 包含関係  $H^2(0, 1) \subset D(A_1^{\frac{3}{4}-\epsilon})$  に注意すると, (3) 式より次式を導くことができる.

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -A_1 x_1(t) + A_1^{\frac{3}{4}-\epsilon} \psi u(t), & x_1(0) = A_1^{-\frac{1}{4}-\epsilon} z_{10} =: x_{10} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = (-A_1 + a_1)x_2(t) + a_2 x_1(t), & x_2(0) = A_1^{-\frac{1}{4}-\epsilon} z_{20} =: x_{20} \\ y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T = [\langle e^{\alpha(\cdot)} c_1, A_1^{\frac{1}{4}+\epsilon} x_1(t) \rangle_\alpha, \langle e^{\alpha(\cdot)} c_2, A_1^{\frac{1}{4}+\epsilon} x_2(t) \rangle_\alpha]^T \end{cases} \quad (8)$$

ここで  $\psi \in H^2(0, 1)$  は境界値問題

$$\mathcal{L}\psi = 0 \quad \text{in } (0, 1), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = g \quad \text{on } \{0, 1\} \quad (9)$$

の一意解であり, 具体的につぎのように与えられる.

$$\psi(x) = -\frac{\alpha - \sqrt{D}}{2a_1(e^{\sqrt{D}} - 1)} e^{\frac{\alpha + \sqrt{D}}{2}x} + \frac{(\alpha + \sqrt{D})e^{\sqrt{D}}}{2a_1(e^{\sqrt{D}} - 1)} e^{\frac{\alpha - \sqrt{D}}{2}x}, \quad D := \alpha^2 + 4a_1$$

有界作用素  $B_1 : \mathbf{R} \rightarrow L_\alpha^2(0, 1)$ ,  $C_1 : L_\alpha^2(0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$  および  $C_2 : L_\alpha^2(0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\begin{aligned} B_1 v &= A_1^{\frac{3}{4}-\epsilon} \psi v, \quad v \in \mathbf{R} \\ C_1 \varphi &= \langle e^{\alpha(\cdot)} c_1, \varphi \rangle_\alpha, \quad C_2 \varphi = \langle e^{\alpha(\cdot)} c_2, \varphi \rangle_\alpha, \quad \varphi \in L_\alpha^2(0, 1) \end{aligned}$$

のように定義すると、システム (8) はつぎのように書ける.

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -A_1 x_1(t) + B_1 u(t), & x_1(0) = x_{10} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = (-A_1 + a_1)x_2(t) + a_2 x_1(t), & x_2(0) = x_{20} \\ y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T = [C_1 A_1^\gamma x_1(t), C_2 A_1^\gamma x_2(t)]^T \end{cases} \quad (10)$$

ここで  $\gamma := \frac{1}{4} + \epsilon \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ .

## 2.2 安定化問題

以下のように定義される作用素  $A$  は、空間  $[L_\alpha^2(0, 1)]^2$  上で growth bound がゼロに等しい  $C_0$ -半群  $e^{tA}$  を生成する.

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ a_2 & -A_1 + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 f_1 \\ (-A_1 + a_1)f_2 + a_2 f_1 \end{bmatrix} \\ D(A) &= \left\{ \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in [H^2(0, 1)]^2; f_1'(0) = f_1'(1) = 0, f_2'(0) = f_2'(1) = 0 \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

すなわち、システム (10) は漸近安定ではない. ここでの目的は、システム (10) に対して有限次元安定化コントローラを構成することである.

## 3 システムの分割と有限次元コントローラの設計

### 3.1 システムの分割

システム (10) に対する有限次元モデルを導出するために、 $P_k f = \sum_{i=0}^k \langle f, \varphi_i \rangle_\alpha \varphi_i$  で定義される直交射影作用素  $P_k$  を用いる. まずはじめに、正数  $\kappa$  が与えられているとし、 $-\lambda_{l+1} + a_1 < -\kappa$  を満たすように整数  $l$  ( $l \geq 0$ ) を選ぶ. つぎに、別の整数  $n$  を  $n > l$  となるように選ぶ. 作用素  $P_l$  および  $P_n$  ( $n > l$ ) を用いて、状態変数  $x_1(t)$  と  $x_2(t)$  を以下のように分割する.

$$x_1(t) = x_{1,1}(t) + x_{1,2}(t) + x_{1,3}(t), \quad x_2(t) = x_{2,1}(t) + x_{2,2}(t) + x_{2,3}(t)$$

ここで

$$x_{i,1}(t) := P_l x_i(t), \quad x_{i,2}(t) := (P_n - P_l) x_i(t), \quad x_{i,3}(t) := (I - P_n) x_i(t) \quad (i = 1, 2)$$

また、これに伴って空間  $L_\alpha^2(0, 1)$  は以下のように表される.

$$L_\alpha^2(0, 1) = P_l L_\alpha^2(0, 1) \oplus (P_n - P_l) L_\alpha^2(0, 1) \oplus (I - P_n) L_\alpha^2(0, 1)$$

ただし、各空間の次元は  $\dim P_l L_\alpha^2(0, 1) = l + 1$ ,  $\dim (P_n - P_l) L_\alpha^2(0, 1) = n - l$ ,  $\dim (I - P_n) L_\alpha^2(0, 1) = \infty$  である. したがって、システム (10) は等価的に以下のように表される.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_{1,1}(t)}{dt} = -A_{1,1}x_{1,1}(t) + B_{1,1}u(t), \quad x_{1,1}(0) = x_{10}^1 \\ \frac{dx_{1,2}(t)}{dt} = -A_{1,2}x_{1,2}(t) + B_{1,2}u(t), \quad x_{1,2}(0) = x_{10}^2 \\ \frac{dx_{1,3}(t)}{dt} = -A_{1,3}x_{1,3}(t) + B_{1,3}u(t), \quad x_{1,3}(0) = x_{10}^3 \\ \frac{dx_{2,1}(t)}{dt} = (-A_{1,1} + a_1)x_{2,1}(t) + a_2x_{1,1}(t), \quad x_{2,1}(0) = x_{20}^1 \\ \frac{dx_{2,2}(t)}{dt} = (-A_{1,2} + a_1)x_{2,2}(t) + a_2x_{1,2}(t), \quad x_{2,2}(0) = x_{20}^2 \\ \frac{dx_{2,3}(t)}{dt} = (-A_{1,3} + a_1)x_{2,3}(t) + a_2x_{1,3}(t), \quad x_{2,3}(0) = x_{20}^3 \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_{1,1}A_{1,1}^\gamma x_{1,1}(t) + C_{1,2}A_{1,2}^\gamma x_{1,2}(t) + C_{1,3}A_{1,3}^\gamma x_{1,3}(t) \\ C_{2,1}A_{1,1}^\gamma x_{2,1}(t) + C_{2,2}A_{1,2}^\gamma x_{2,2}(t) + C_{2,3}A_{1,3}^\gamma x_{2,3}(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (12)$$

ここで

$$\begin{array}{lll} A_{1,1} := P_l A_1 P_l, & A_{1,2} := (P_n - P_l) A_1 (P_n - P_l), & A_{1,3} := (I - P_n) A_1 (I - P_n) \\ B_{1,1} := P_l B_1, & B_{1,2} := (P_n - P_l) B_1, & B_{1,3} := (I - P_n) B_1 \\ C_{1,1} := C_1 P_l, & C_{1,2} := C_1 (P_n - P_l), & C_{1,3} := C_1 (I - P_n) \\ C_{2,1} := C_2 P_l, & C_{2,2} := C_2 (P_n - P_l), & C_{2,3} := C_2 (I - P_n) \\ x_{10}^1 := P_l x_{10}, & x_{10}^2 := (P_n - P_l) x_{10}, & x_{10}^3 := (I - P_n) x_{10} \\ x_{20}^1 := P_l x_{20}, & x_{20}^2 := (P_n - P_l) x_{20}, & x_{20}^3 := (I - P_n) x_{20} \end{array}$$

この中で、作用素  $A_{1,3}$ ,  $A_{1,3}^\gamma$  は非有界であるが、他の作用素はすべて有界である。

以降、有限次元ヒルベルト空間  $P_l L_\alpha^2(0, 1)$  を基底  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_l\}$  に関してユークリッド空間  $\mathbf{R}^{l+1}$  と同一視する。このようにして、 $P_l L_\alpha^2(0, 1)$  の要素は  $(l+1)$  次元ベクトルと同一視され、作用素  $A_{1,1}$ ,  $B_{1,1}$ ,  $C_{1,1}$ ,  $C_{2,1}$  は適当なサイズの行列と同一視される。同様に、 $(P_n - P_l) L_\alpha^2(0, 1)$  の要素は  $(n-l)$  次元ベクトルと同一視され、作用素  $A_{1,2}$ ,  $B_{1,2}$ ,  $C_{1,2}$ ,  $C_{2,2}$  は適当なサイズの行列と同一視される。

システム (12) の第 1 式と第 4 式を、そして第 2 式と第 5 式を、さらに第 3 式と第 6 式を組み合わせるにより、以下の式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{x}_1(t)}{dt} = \bar{A}_1 \bar{x}_1(t) + \bar{B}_1 u(t), \quad \bar{x}_1(0) = \bar{x}_{10} \\ \frac{d\bar{x}_2(t)}{dt} = \bar{A}_2 \bar{x}_2(t) + \bar{B}_2 u(t), \quad \bar{x}_2(0) = \bar{x}_{20} \\ \frac{d\bar{x}_3(t)}{dt} = \bar{A}_3 \bar{x}_3(t) + \bar{B}_3 u(t), \quad \bar{x}_3(0) = \bar{x}_{30} \\ y(t) = \tilde{C}_1 \bar{x}_1(t) + \tilde{C}_2 \bar{x}_2(t) + \tilde{C}_3 \bar{x}_3(t) \end{array} \right. \quad (13)$$

ここで

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(t) &:= \begin{bmatrix} x_{1,1}(t) \\ x_{2,1}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_{10} := \begin{bmatrix} x_{10}^1 \\ x_{20}^1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2(l+1)} \\ \bar{x}_2(t) &:= \begin{bmatrix} x_{1,2}(t) \\ x_{2,2}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_{20} := \begin{bmatrix} x_{10}^2 \\ x_{20}^2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2(n-l)} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_3(t) := \begin{bmatrix} x_{1,3}(t) \\ x_{2,3}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_{30} := \begin{bmatrix} x_{10}^3 \\ x_{20}^3 \end{bmatrix} \in [(I - P_n)L_\alpha^2(0, 1)]^2$$

行列および作用素は以下のとおりである.

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &:= \begin{bmatrix} -A_{1,1} & 0 \\ a_2 I_{l+1} & -A_{1,1} + a_1 I_{l+1} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 := \begin{bmatrix} B_{1,1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_1 := \begin{bmatrix} C_{1,1} A_{1,1}^\gamma & 0 \\ 0 & C_{2,1} A_{1,1}^\gamma \end{bmatrix} \\ \bar{A}_2 &:= \begin{bmatrix} -A_{1,2} & 0 \\ a_2 I_{n-l} & -A_{1,2} + a_1 I_{n-l} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 := \begin{bmatrix} B_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_2 := \begin{bmatrix} C_{1,2} A_{1,2}^\gamma & 0 \\ 0 & C_{2,2} A_{1,2}^\gamma \end{bmatrix} \\ \bar{A}_3 &:= \begin{bmatrix} -A_{1,3} & 0 \\ a_2 I & -A_{1,3} + a_1 I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_3 := \begin{bmatrix} B_{1,3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_3 := \begin{bmatrix} C_{1,3} A_{1,3}^\gamma & 0 \\ 0 & C_{2,3} A_{1,3}^\gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 3.2 RMF を用いた有限次元コントローラ

分割されたシステム (13) より, 有限次元システム

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}_1(t)}{dt} = \bar{A}_1 \bar{x}_1(t) + \bar{B}_1 u(t) \\ y(t) = \tilde{C}_1 \bar{x}_1(t) \end{cases} \quad (14)$$

をシステム (10) に対する有限次元モデルとする.

【仮定 3.1】  $(\bar{A}_1, \bar{B}_1)$  は可制御であり,  $(\tilde{C}_1, \bar{A}_1)$  は可観測である.

この仮定のもとで, 行列  $\bar{A}_1 - \bar{B}_1 F_1$  が安定になるように行列  $F_1$  を選ぶことができ, 行列  $\bar{A}_1 - G_1 \tilde{C}_1$  が安定になるように行列  $G_1$  を選ぶことができる. ここで, つぎの制御則を考えよう.

$$\begin{cases} \frac{dw_1(t)}{dt} = (\bar{A}_1 - G_1 \tilde{C}_1) w_1(t) + G_1 y(t) + \bar{B}_1 u(t), \quad w_1(0) = w_{10} \\ u(t) = -F_1 w_1(t) \end{cases} \quad (15)$$

制御則 (15) は有限次元モデル (14) に対して安定化コントローラとして機能するが, 元のシステム (10) に対しては閉ループ系の安定性が保証されない. それゆえに, RMF

$$\begin{cases} \frac{dw_2(t)}{dt} = \bar{A}_2 w_2(t) + \bar{B}_2 u(t), \quad w_2(0) = w_{20} \\ \hat{y}_2(t) = \tilde{C}_2 w_2(t) \end{cases}$$

を制御則 (15) に付け加える. そのとき, コントローラ全体は以下ようになる.

$$\begin{cases} \frac{dw_2(t)}{dt} = \bar{A}_2 w_2(t) + \bar{B}_2 u(t), \quad w_2(0) = w_{20} \\ \hat{y}_2(t) = \tilde{C}_2 w_2(t) \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \frac{dw_1(t)}{dt} = (\bar{A}_1 - G_1 \tilde{C}_1) w_1(t) + G_1 (y(t) - \hat{y}_2(t)) + \bar{B}_1 u(t), \quad w_1(0) = w_{10} \\ u(t) = -F_1 w_1(t) \end{cases} \quad (17)$$

【定理 3.1】 ある与えられた正数  $\kappa$  に対して, 整数  $l (l \geq 0)$  が  $-\lambda_{l+1} + a_1 < -\kappa$  となるように選ばれているとする. また, 仮定 3.1 が満たされているとする. さらに, 別の整数  $n$  が  $n > l$  となるように選ばれているとする. そのとき, (16) と (17) から構成される制御則は, 整数  $n$  が十分大きいときに, システム (10) に対する有限次元安定化コントローラになる. 加えて, その閉ループ系を記述する  $C_0$ -半群の growth bound は,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $-\kappa$  に近づく.

### 3.3 定理 3.1 の証明

【補題 3.1】 ([11, Lemma 4.1])  $A_{11}$  をヒルベルト空間  $X_1$  上の  $C_0$ -半群  $S_1(t)$  の生成素とし,  $A_{22}$  をヒルベルト空間  $X_2$  上の  $C_0$ -半群  $S_2(t)$  の生成素とする. その  $C_0$ -半群はノルム評価

$$\|S_1(t)\|_{\mathcal{L}(X_1)} \leq M_1 e^{\omega_1 t}, \quad \|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(X_2)} \leq M_2 e^{\omega_2 t}, \quad t \geq 0, \quad \omega_1 \neq \omega_2$$

をもち,  $A_{12} : X_2 \rightarrow X_1$  および  $A_{21} : X_1 \rightarrow X_2$  は有界線形作用素であると仮定する. そのとき, 作用素  $\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$  によって生成される  $X_1 \times X_2$  上の  $C_0$ -半群  $\bar{S}_{21}(t)$  と作用素  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$  によって生成される  $X_1 \times X_2$  上の  $C_0$ -半群  $\bar{S}_{12}(t)$  に対して, 以下のノルム評価が成立する.

$$\|\bar{S}_{21}(t)\|_{\mathcal{L}(X_1 \times X_2)} \leq \max(M_1, M_2) \left( 1 + \frac{\max(M_1, M_2) \|A_{21}\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)}}{|\omega_1 - \omega_2|} \right) e^{\max(\omega_1, \omega_2)t}, \quad t \geq 0$$

$$\|\bar{S}_{12}(t)\|_{\mathcal{L}(X_1 \times X_2)} \leq \max(M_1, M_2) \left( 1 + \frac{\max(M_1, M_2) \|A_{12}\|_{\mathcal{L}(X_2, X_1)}}{|\omega_1 - \omega_2|} \right) e^{\max(\omega_1, \omega_2)t}, \quad t \geq 0$$

【注意 3.1】 上の補題に類似した結果が [5, Lemma 3.2.2] で与えられている.

新しい変数  $e_1(t) := \bar{x}_1(t) - w_1(t)$ ,  $e_2(t) := \bar{x}_2(t) - w_2(t)$  を導入すると, 閉ループ系は

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = (\mathcal{A} + \Delta\mathcal{A})\xi(t), \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (18)$$

と書ける. ここで, 状態ベクトル

$$\xi(t) := \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ e_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ e_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \end{bmatrix}$$

は, 内積

$$\langle \xi, \tilde{\xi} \rangle_Z = \bar{x}_1^T \tilde{x}_1 + e_1^T \tilde{e}_1 + \bar{x}_2^T \tilde{x}_2 + e_2^T \tilde{e}_2 + \langle \bar{x}_3, \tilde{x}_3 \rangle_\alpha, \quad \xi = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ e_1 \\ \bar{x}_2 \\ e_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{e}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \in Z$$



を有する実ヒルベルト空間

$$Z := \mathbf{R}^{2(l+1)} \times \mathbf{R}^{2(l+1)} \times \mathbf{R}^{2(n-l)} \times \mathbf{R}^{2(n-l)} \times [(I - P_n)L_\alpha^2(0, 1)]^2$$

に値をとり、作用素  $\mathcal{A}$ ,  $\Delta\mathcal{A}$  はつぎのように定義されている.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 - \bar{B}_1 F_1 & \bar{B}_1 F_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_1 - G_1 \tilde{C}_1 & 0 & -G_1 \tilde{C}_2 & -G_1 \tilde{C}_3 \\ -\bar{B}_2 F_1 & \bar{B}_2 F_1 & \bar{A}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{B}_3 F_1 & \bar{B}_3 F_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

この中で、作用素  $\mathcal{A}$  は非有界作用素  $\bar{A}_3$ ,  $\tilde{C}_3$  を含むので非有界であるが、作用素  $\Delta\mathcal{A}$  は有界である. ここで、作用素  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A}_{12}$  を

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 - \bar{B}_1 F_1 & \bar{B}_1 F_1 & 0 \\ 0 & \bar{A}_1 - G_1 \tilde{C}_1 & 0 \\ -\bar{B}_2 F_1 & \bar{B}_2 F_1 & \bar{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & 0 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -G_1 \tilde{C}_2 & -G_1 \tilde{C}_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

のように定義すると、 $\mathcal{A}$  はつぎのように書ける.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mathcal{A}_2 \end{bmatrix}$$

そのとき、作用素  $\mathcal{A}$  は  $C_0$ -半群を生成し、以下のように表せる.

$$e^{t\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} e^{t\mathcal{A}_1} & \Phi(t) \\ 0 & e^{t\mathcal{A}_2} \end{bmatrix}, \quad \Phi(t) := \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}_1} \mathcal{A}_{12} e^{s\mathcal{A}_2} ds \quad (19)$$

$C_0$ -半群  $e^{t\mathcal{A}}$  の作用素ノルムを評価するために  $e^{t\mathcal{A}_1}$ ,  $e^{t\mathcal{A}_2}$ ,  $\Phi(t)$  のノルムをそれぞれ評価する. まずはじめに、行列  $e^{t\mathcal{A}_1}$  のノルムを評価しよう. そのために、行列

$$\exp\left\{t \begin{bmatrix} \bar{A}_1 - \bar{B}_1 F_1 & \bar{B}_1 F_1 \\ 0 & \bar{A}_1 - G_1 \tilde{C}_1 \end{bmatrix}\right\}$$

のノルムから評価する. 仮定 3.1 のもとで対  $(\tilde{C}_1, \bar{A}_1)$  は可観測であるので、行列  $G_1$  を適当に選ぶことにより、行列  $e^{t(\bar{A}_1 - G_1 \tilde{C}_1)}$  のノルムを以下のように評価できる.

$$\|e^{t(\bar{A}_1 - G_1 \tilde{C}_1)}\| \leq M_1 e^{-\omega_1 t}, \quad t \geq 0 \quad (20)$$

ここで  $M_1 \geq 1$  と  $\omega_1 > 0$  は整数  $n$  に無関係であり、 $\omega_1$  は  $-\kappa > -\omega_1 > -\lambda_{l+1} + a_1$  となるように選ばれている. また、仮定 3.1 のもとで対  $(\bar{A}_1, \bar{B}_1)$  は可制御であるので、適当に行列  $F_1$  を選ぶことによって、行列  $e^{t(\bar{A}_1 - \bar{B}_1 F_1)}$  のノルムを以下のように評価できる.

$$\|e^{t(\bar{A}_1 - \bar{B}_1 F_1)}\| \leq M_2 e^{-\kappa t}, \quad t \geq 0 \quad (21)$$

ここで  $M_2 \geq 1$  は整数  $n$  に無関係である. したがって  $\|\bar{B}_1 F_1\| \leq \|B_1\| \|F_1\|$  に注意して、補題 3.1 を (20), (21) に適用すると

$$\left\| \exp\left\{t \begin{bmatrix} \bar{A}_1 - \bar{B}_1 F_1 & \bar{B}_1 F_1 \\ 0 & \bar{A}_1 - G_1 \tilde{C}_1 \end{bmatrix}\right\} \right\| \leq M e^{-\kappa t}, \quad t \geq 0 \quad (22)$$

を得る. ただし,  $M$  は

$$M = \max(M_1, M_2) \left( 1 + \frac{\max(M_1, M_2) \|B_1\| \|F_1\|}{\omega_1 - \kappa} \right) (\geq 1)$$

で定義される定数であり, 整数  $n$  に無関係である.

行列  $e^{t\bar{A}_2}$ , ただし

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -A_{1,2} & 0 \\ a_2 I_{n-l} & -A_{1,2} + a_1 I_{n-l} \end{bmatrix}$$

に対しては, 補題 3.1 より次式が従う.

$$\|e^{t\bar{A}_2}\| \leq \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \right) e^{(-\lambda_{l+1} + a_1)t}, \quad t \geq 0 \quad (23)$$

ここで

$$\|e^{-tA_{1,2}}\| = e^{-\lambda_{l+1}t}, \quad \|e^{t(-A_{1,2} + a_1 I_{n-l})}\| = e^{(-\lambda_{l+1} + a_1)t}, \quad \|a_2 I_{n-l}\| = a_2$$

を用いている. よって  $\left\| \begin{bmatrix} -\bar{B}_2 F_1 & \bar{B}_2 F_1 \end{bmatrix} \right\| \leq 2\|\bar{B}_2 F_1\| \leq 2\|B_1\| \|F_1\|$  に注意して, 補題 3.1 を (22), (23) に適用すると

$$\|e^{tA_1}\| \leq M' e^{-\kappa t}, \quad t \geq 0 \quad (24)$$

を得る. ただし,  $M'$  は

$$M' = \max \left( M, 1 + \frac{a_2}{a_1} \right) \left( 1 + \frac{2 \max(M, 1 + \frac{a_2}{a_1}) \|B_1\| \|F_1\|}{\lambda_{l+1} - a_1 - \kappa} \right) (\geq 1)$$

で定義される定数であり, 整数  $n$  に無関係である.

つぎに, 作用素  $A_2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & 0 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix}$  によって生成される  $C_0$ -半群  $e^{tA_2} = \begin{bmatrix} e^{t\bar{A}_2} & 0 \\ 0 & e^{t\bar{A}_3} \end{bmatrix}$  のノルムを以下のように評価する.

$$\|e^{tA_2}\| \leq \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \right) e^{(-\lambda_{l+1} + a_1)t}, \quad t \geq 0 \quad (25)$$

ここで, 以下の評価を用いている.

$$\|e^{t\bar{A}_2}\| \leq \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \right) e^{(-\lambda_{l+1} + a_1)t}, \quad \|e^{t\bar{A}_3}\| \leq \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \right) e^{(-\lambda_{n+1} + a_1)t}, \quad t \geq 0$$

最後に, 作用素

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{(t-s)A_1} A_{12} e^{sA_2} ds$$

のノルムを評価しよう. はじめに,  $e^{(t-s)A_1} A_{12} e^{sA_2}$  の部分を以下のように書く.

$$e^{(t-s)A_1} A_{12} e^{sA_2} = e^{(t-s)A_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -G_1 & -G_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 e^{s\bar{A}_2} & 0 \\ 0 & \tilde{C}_3 e^{s\bar{A}_3} \end{bmatrix} \quad (26)$$

ここで, 行列  $e^{s\bar{A}_2}$  は

$$e^{s\bar{A}_2} = \begin{bmatrix} e^{-sA_{1,2}} & 0 \\ \frac{a_2}{a_1} (e^{s(-A_{1,2} + a_1)} - e^{-sA_{1,2}}) & e^{s(-A_{1,2} + a_1)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

のように表せ, 同様に  $C_0$ -半群  $e^{s\bar{A}_3}$  は

$$e^{s\bar{A}_3} = \begin{bmatrix} e^{-sA_{1,3}} & 0 \\ \frac{a_2}{a_1}(e^{s(-A_{1,3}+a_1)} - e^{-sA_{1,3}}) & e^{s(-A_{1,3}+a_1)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

のように表せる. (27), (28) を用いて, 作用素 (26) は以下のように書ける.

$$e^{(t-s)A_1} A_{12} e^{sA_2} = e^{(t-s)A_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -G_1 & -G_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2,3} \end{bmatrix} U_\gamma(s) \quad (29)$$

ここで

$$U_\gamma(s) := \begin{bmatrix} A_{1,2}^\gamma e^{-sA_{1,2}} & 0 \\ \frac{a_2}{a_1}(A_{1,2}^\gamma e^{s(-A_{1,2}+a_1)} - A_{1,2}^\gamma e^{-sA_{1,2}}) & A_{1,2}^\gamma e^{s(-A_{1,2}+a_1)} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ A_{1,3}^\gamma e^{-sA_{1,3}} & 0 \\ \frac{a_2}{a_1}(A_{1,3}^\gamma e^{s(-A_{1,3}+a_1)} - A_{1,3}^\gamma e^{-sA_{1,3}}) & A_{1,3}^\gamma e^{s(-A_{1,3}+a_1)} \end{bmatrix} \quad (30)$$

作用素  $U_\gamma(s)$  に関連して, 以下の作用素  $V_\gamma(s)$  を考えよう.

$$V_\gamma(s) = \begin{bmatrix} A_{1,2}^\gamma e^{-sA_{1,2}} & 0 \\ 0 & A_{1,3}^\gamma e^{-sA_{1,3}} \\ \frac{a_2}{a_1}(A_{1,2}^\gamma e^{s(-A_{1,2}+a_1)} - A_{1,2}^\gamma e^{-sA_{1,2}}) & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{a_1}(A_{1,3}^\gamma e^{s(-A_{1,3}+a_1)} - A_{1,3}^\gamma e^{-sA_{1,3}}) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ A_{1,2}^\gamma e^{s(-A_{1,2}+a_1)} & 0 \\ 0 & A_{1,3}^\gamma e^{s(-A_{1,3}+a_1)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

このとき,  $\|U_\gamma(s)\| = \|V_\gamma(s)\|$  が成立する. いま, 新たに作用素

$$W_\gamma(s) := \begin{bmatrix} A_{1,2}^\gamma e^{-sA_{1,2}} & 0 \\ 0 & A_{1,3}^\gamma e^{-sA_{1,3}} \end{bmatrix}$$

を導入すると,  $V_\gamma(s)$  はつぎのように表せる.

$$V_\gamma(s) = \begin{bmatrix} W_\gamma(s) & 0 \\ \frac{a_2}{a_1}(e^{a_1 s} W_\gamma(s) - W_\gamma(s)) & e^{a_1 s} W_\gamma(s) \end{bmatrix}$$

ここで

$$\|W_\gamma(s)\| \leq \{\lambda_{l+1}^\gamma + s^{-\gamma}\} e^{-\lambda_{l+1}s}, \quad s > 0 \quad (32)$$

に注意すると,  $U_\gamma(s)$  のノルムをつぎのように評価できる.

$$\begin{aligned}\|U_\gamma(s)\| &= \|V_\gamma(s)\| \leq \|W_\gamma(s)\| + \|e^{a_1 s} W_\gamma(s)\| + \left\| \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1 s} W_\gamma(s) - W_\gamma(s)) \right\| \\ &\leq \left( 2 + \frac{2a_2}{a_1} \right) \{ \lambda_{l+1}^\gamma + s^{-\gamma} \} e^{(-\lambda_{l+1} + a_1)s}, \quad s > 0\end{aligned}\quad (33)$$

したがって, (24), (29) および (33) を用いて,  $\Phi(t)$  のノルムを以下のように評価できる.

$$\begin{aligned}\|\Phi(t)\| &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)\mathcal{A}_1} \mathcal{A}_{12} e^{s\mathcal{A}_2}\| ds \\ &\leq 8M' \|G_1\| (\|C_1\| + \|C_2\|) \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \right) e^{-\kappa t} \int_0^t \{ \lambda_{l+1}^\gamma + s^{-\gamma} \} e^{(\kappa - \lambda_{l+1} + a_1)s} ds\end{aligned}$$

さらに  $\int_0^t \{ \lambda_{l+1}^\gamma + s^{-\gamma} \} e^{(\kappa - \lambda_{l+1} + a_1)s} ds$  の上限をつぎのように見積もることができる.

$$\int_0^t \{ \lambda_{l+1}^\gamma + s^{-\gamma} \} e^{(\kappa - \lambda_{l+1} + a_1)s} ds \leq \frac{\lambda_{l+1}^\gamma}{\lambda_{l+1} - a_1 - \kappa} + \frac{\Gamma(1-\gamma)}{(\lambda_{l+1} - a_1 - \kappa)^{1-\gamma}}$$

ただし  $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数である. よって, 最終的に以下のように評価できる.

$$\|\Phi(t)\| \leq M'' e^{-\kappa t}, \quad t \geq 0 \quad (34)$$

ここで  $M''$  は

$$M'' = 8M' \|G_1\| (\|C_1\| + \|C_2\|) \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \right) \left\{ \frac{\lambda_{l+1}^\gamma}{\lambda_{l+1} - a_1 - \kappa} + \frac{\Gamma(1-\gamma)}{(\lambda_{l+1} - a_1 - \kappa)^{1-\gamma}} \right\}$$

によって定義される定数であり, 整数  $n$  には無関係である.

結局, (24), (25) および (34) より, 作用素  $\mathcal{A}$  によって生成される  $C_0$ -半群  $e^{t\mathcal{A}}$  のノルムを以下のように評価できる.

$$\|e^{t\mathcal{A}}\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq \|e^{t\mathcal{A}_1}\| + \|e^{t\mathcal{A}_2}\| + \|\Phi(t)\| \leq \overline{M} e^{-\kappa t}, \quad t \geq 0 \quad (35)$$

ただし,  $\overline{M}$  は

$$\overline{M} = M' + M'' + 1 + \frac{a_2}{a_1} \quad (\geq 1)$$

で定義される定数であり, 整数  $n$  に無関係である.

作用素  $\mathcal{A} + \Delta\mathcal{A}$  によって生成される  $C_0$ -半群  $e^{t(\mathcal{A} + \Delta\mathcal{A})}$  に対しては, よく知られた半群の摂動定理 (e.g. [13, Theorem 3.4.1], [8, Theorem 3.1.1], [5, Theorem 3.2.1]) を用いて, 作用素ノルムを以下のように評価できる.

$$\|e^{t(\mathcal{A} + \Delta\mathcal{A})}\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq \overline{M} e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0 \quad (36)$$

ただし

$$\sigma := \kappa - \overline{M} \|\Delta\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(Z)}$$

ここで,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\|B_{1,3}\| \rightarrow 0$  となること, および  $\|F_1\|$  が整数  $n$  に依存しないことに注意すると

$$\|\Delta\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq 2\|\overline{B}_3\| \|F_1\| \leq 2\|B_{1,3}\| \|F_1\| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

となることがわかる. したがって, ある正の整数  $n_1$  が存在して

$$\sigma = \kappa - \overline{M} \|\Delta A\|_{\mathcal{L}(Z)} > 0, \quad \forall n \geq n_1 \quad (37)$$

が成立する. すなわち, 整数  $n$  が  $n \geq n_1$  となるように選ばれているとき,  $C_0$ -半群  $e^{t(A+\Delta A)}$  は指数安定になる. そして, その  $C_0$ -半群の growth bound  $-\sigma$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき  $-\kappa$  に近づく.  $\square$

【注意 3.2】 修正された Gronwall の不等式 [10, Lemma 4.1] を用いることにより,  $\|\cdot\|_Z$  よりも強い空間ノルムの意味で閉ループ系の安定性を示すことができる.

## 4 数値実験

システム (1), (2) において  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0.7$ ,  $\alpha = 10$ ,  $c_1(x) = c_2(x) = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{1}_{[1-\varepsilon, 1]}(x)$  ( $\varepsilon = 0.05$ ) とおく. ここで,  $\mathbf{1}_{[1-\varepsilon, 1]}(x)$  は  $[1-\varepsilon, 1]$  上で値 1, その外では値 0 をとる特性関数である. さらに, 変数変換 (7) に含まれるパラメータを  $\varepsilon = 0.1$  とおく.

はじめに  $\kappa = 5$  を与え, 整数  $l$  ( $l \geq 0$ ) を  $l = 1$  と選ぶ. 実際  $l = 1$  のとき, 不等式  $-\lambda_{l+1} + a_1 < -\kappa$  が成立する. したがって, 有限次元モデル (14) を具体的に求めることができ, 対  $(\overline{A}_1, \overline{B}_1)$  は可制御, 対  $(\tilde{C}_1, \overline{A}_1)$  は可観測となる (すなわち, 有限次元モデル (14) は仮定 3.1 を満足する) ことを確認できる. よって, 行列  $\overline{A}_1 - \overline{B}_1 F_1$  の固有値が  $\{-5, -6, -7, -8\}$  に等しくなるように行列  $F_1$  を, また行列  $\overline{A}_1 - G_1 \tilde{C}_1$  の固有値が  $\{-12, -13, -14, -15\}$  に等しくなるように行列  $G_1$  を選ぶことができる. MATLAB Control System Toolbox を用いることにより, これらの行列  $F_1, G_1$  は以下のように求まる.

$$F_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.0002 & -0.2158 & 0.0006 & 3.6343 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1.3693 & 0.0968 \\ 0.0377 & -0.0014 \\ 0.2875 & 1.6955 \\ -0.0039 & 0.0334 \end{bmatrix}$$

整数  $n$  ( $n > l = 1$ ) の値を変えて数値実験を行った結果,  $n$  が偶数のときには有限次元コントローラ (16), (17) によってシステム (1), (2) を安定化できることが確認できた. それに対して, 整数  $n$  が奇数のときには,  $n \geq 9$  となるようにとれば安定化できることが確認できた. Fig. 1 は  $n = 15$  のときの数値実験結果である. なお, この例は RMF (16) を用いない場合はシステムを不安定化する例 (すなわち, スピルオーバー現象が生じる例) となっている.

## 参考文献

- [1] M.J. Balas, Finite-dimensional controllers for linear distributed parameter systems: exponential stability using residual mode filters. J. Math. Anal. Appl., **133** (1988), 283–296.
- [2] P.D. Christofides and P. Daoutidis, Finite-dimensional control of parabolic PDE systems using approximate inertial manifolds. J. Math. Anal. Appl., **216** (1997), 398–420.
- [3] R.F. Curtain, Finite dimensional compensators for parabolic distributed systems with unbounded control and observation. SIAM J. Control Optim., **22** (1984), 255–276.

- [4] R.F. Curtain and D. Salamon, Finite dimensional compensators for infinite dimensional systems with unbounded input operators. *SIAM J. Control Optim.*, **24** (1986), 797–816.
- [5] R.F. Curtain and H.J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Texts in Applied Mathematics, Vol. 21, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [6] G. Hagen and I. Mezić, Spillover stabilization in finite-dimensional control and observer design for dissipative evolution equations. *SIAM J. Control Optim.*, **42** (2003), 746–768.
- [7] T. Nambu, On stabilization of partial differential equations of parabolic type: boundary observation and feedback. *Funkcialaj Ekvacioj, Serio Internacia*, **28** (1985), 267–298.
- [8] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [9] Y. Sakawa, Feedback stabilization of linear diffusion systems. *SIAM J. Control Optim.*, **21** (1983), 667–676.
- [10] H. Sano and N. Kunimatsu, Modified Gronwall's inequality and its application to stabilization problem for semilinear parabolic systems. *Systems Control Lett.*, **22** (1994), 145–156.
- [11] H. Sano and N. Kunimatsu, An application of inertial manifold theory to boundary stabilization of semilinear diffusion systems. *J. Math. Anal. Appl.*, **196** (1995), 18–42.
- [12] J.M. Schumacher, A direct approach to compensator design for distributed parameter systems. *SIAM J. Control Optim.*, **21** (1983), 823–836.
- [13] H. Tanabe, *Equations of Evolution*. Iwanami, Tokyo, 1975 (in Japanese).
- [14] J.J. Winkin, D. Dochain and P. Ligarius, Dynamical analysis of distributed parameter tubular reactors. *Automatica*, **36** (2000), 349–361.

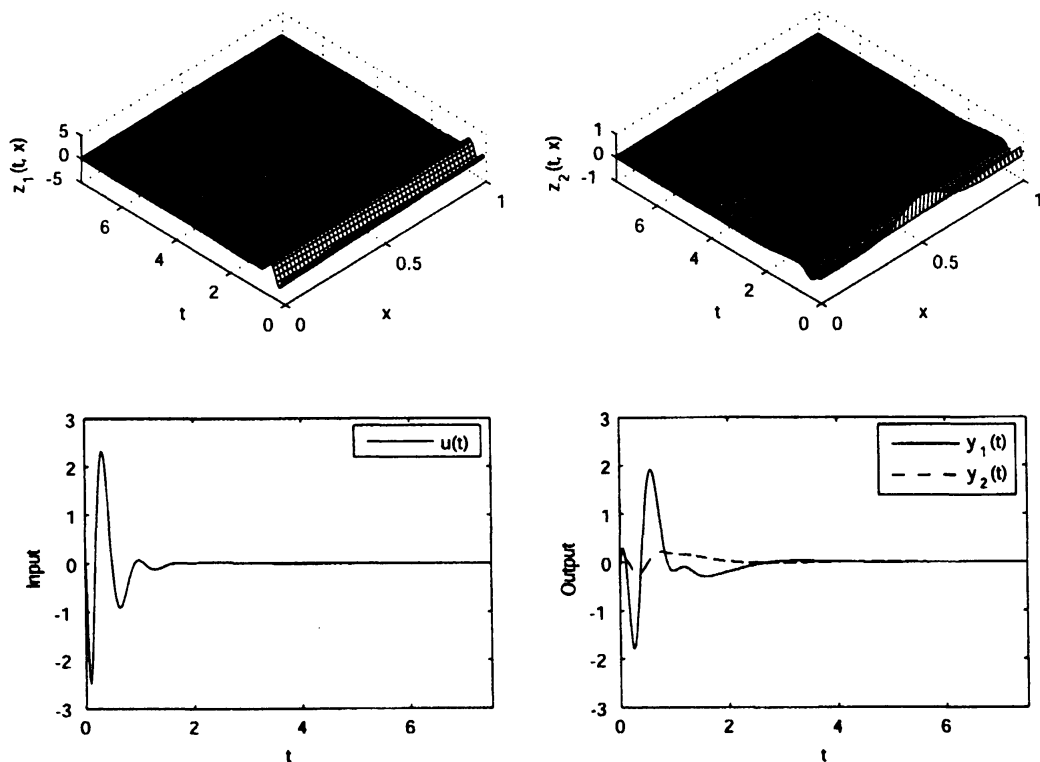


Fig. 1. The case with RMF (16)  $n = 15$